



ANNÉE 2006-2007  
CONCOURS D'ENTRÉE A L'EAMAU  
SESSION DE MAI 2007

Filière : Technicien Supérieur en Gestion Urbaine

ÉPREUVE ÉCRITE

Matière : MATHÉMATIQUE

Durée : 2 Heures

Pour cette épreuve, le candidat est autorisé à utiliser une calculatrice scientifique non programmable.

Exercice 1 : (4pts)

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :  $f(z) = z^3 + (2 + 3i)z^2 + (4 + 4i)z + 8$ .

1. Calculer  $f(i)$ . (0,5 pt)
2. Déterminer deux nombres complexes  $a$  et  $b$  vérifiant :  $f(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$  pour tout complexe  $z$ . (0,5 pt)
3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(z) = 0$ . (1pt)
4. On désigne par  $Z_1$  la solution ayant une partie imaginaire positive, par  $Z_2$  la solution réelle, par  $Z_3$  l'autre solution. Montrer qu'il existe un nombre complexe  $q$  tel que  $Z_2 = qZ_3$  et  $Z_3 = qZ_2$ . (1pt)
5. Soient  $A_1, A_2, A_3$  les points du plan complexe d'affixes respectives  $Z_1, Z_2, Z_3$ . Quelle est la nature du triangle  $(Z_1, Z_2, Z_3)$ ? Justifier. (1pt)

Exercice 2 : (4pts)

Soit la suite définie par :

$$U_n = \frac{n^3 - n}{3}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite. (1pt)
2. Donner l'expression de  $U_{n+1} - U_n$  en fonction de  $n$ . (1pt)
3. Étudier la monotonie de la suite. (1pt)
4. Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $U_n$  est un nombre entier. (1pt)



Problème : (12pts)

On utilise un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ; unité 1 cm

1. Soit la fonction numérique de variable réelle définie par l'expression :  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Déterminer le domaine de définition de  $f$  et encadrer les trois réels  $a, b, c$  tels que pour tout  $x$  du domaine de  $f$  on ait  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ . (2pts)

2. Étudier la fonction  $f$  (limites, sens de variation, tableau de variation). (2pts)
3. Soit  $x$  un réel différent de  $-1$ . On désigne par  $M$  le point d'abscisse  $x$  sur  $C$ , la courbe représentative de la fonction  $f$ , et par  $P$  le point de même abscisse  $x$  sur la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x + 1$ . Calculer  $g(x) = MP^2$ . Déterminer le signe et la limite de  $g(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ . Interpréter géométriquement les résultats obtenus. (3,5 pt)
4. Montrer que le point d'intersection  $I$  des deux asymptotes à la courbe  $C$  est centre de symétrie de  $C$ . Tracer  $C$ . (0,5 pt)
5. Calculer l'aire de la portion de plan limitée par les droites d'équation  $x = 1, x = 2, y = x + 1$  et par la courbe  $C$ . (2 pts)
6. Soit  $t$  un réel strictement supérieur à 1. On appelle  $A(t)$  l'aire (qui dépend de  $t$ ) de la portion de plan limitée par les droites  $x = 1, x = t, y = x + 1$  et la courbe  $C$ . On appelle  $g$  la fonction qui, au réel  $t$ , associe l'aire  $A(t)$ . Déterminer  $g(t)$ , étudier et tracer sa courbe représentative. (2 pts)
7. Résoudre l'équation  $g(t) = 3$ . (2 pts)